# Teoria Miary i Całki

Bartosz Kwaśniewski

Wykład 13

**Miara produktowa**
**i całka iterowana**

Niech $(X, \mathcal{F}_X, \mu_X)$, $(Y, \mathcal{F}_Y, \mu_Y)$ przestrzenie z miarami $\sigma$-skończonymi. Skonstruujemy **produktową przestrzeń z miarą** $\sigma$-skończoną

$$(X \times Y, \mathcal{F}_X \otimes \mathcal{F}_Y, \mu_X \otimes \mu_Y)$$

**Lem.** Iloczyn kartezjański $\sigma$-algebr jest półpierścieniem, tzn. $\mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y := \{A \times B : A \in \mathcal{F}_X,\ B \in \mathcal{F}_Y\}$ jest półpierścieniem zbiorów.

**Dowód:** 

**Def.** $\sigma$-**algebrę produktową** definiujemy jako $\sigma$-algebrę $\mathcal{F}_X \otimes \mathcal{F}_Y := \sigma(\mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y)$ generowaną przez półpierścień $\mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y$.

**Prz.** Rodzina $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ składa się z „prostokątów” na $\mathbb{R}^2$, a $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ zawiera wszystkie zbiory borelowskie na $\mathbb{R}^2$.

**Tw.** Istnieje dokładnie jedna miara $\mu_X \otimes \mu_Y : \mathcal{F}_X \otimes \mathcal{F}_Y \to [0, \infty]$ t., że

$$\forall_{A \in \mathcal{F}_X,\, B \in \mathcal{F}_Y} \qquad \mu_X \otimes \mu_Y(A \times B) = \mu_X(A) \cdot \mu_Y(B). \qquad (\dagger)$$

**Dowód:** Na mocy Twierdzeń o przedłużeniu i jednoznaczności miar wystarczy pokazać, że funkcja $\mu_X \otimes \mu_Y : \mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y \to [0, \infty]$ dana wzorem $(\dagger)$ jest $\sigma$-addytywna. (Idea: zapiszemy $\mu_X \otimes \mu_Y$ jako całkę po $\mu_X$)

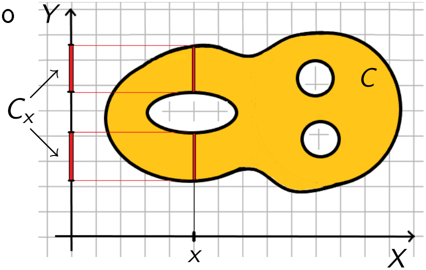
Dla $C = A \times B \in \mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y$ połóżmy $f_C(x) := \mathbb{1}_A \cdot \mu_Y(B)$. Wtedy

$$\int_X f_C(x)\, d\mu_X = \int_X \mathbb{1}_A \cdot \mu_Y(B)\, d\mu_X = \mu_X(A) \cdot \mu_Y(B) = \mu_X \otimes \mu_Y(C).$$

Dla poręczniejszego zapisu, dla każdego $x \in X$ oraz każdego $C \subseteq X \times Y$ rozważmy $x$-**przekrój zbioru** $C$:

$$C_x := \{y \in Y : (x, y) \in C\}$$

zbiór $y$-ków leżących w $C$ nad $x$




Jeśli $C = A \times B$, to $C_x = B$, gdy $x \in A$ oraz $C_x = \emptyset$, gdy $x \notin A$. Stąd

$$f_C(x) = \mu_Y(C_x) \qquad \text{oraz} \qquad \int_X f_C(x)\, d\mu_X = \mu_X \otimes \mu_Y(C).$$

Załóżmy, że $C = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} C_n \in \mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y$, gdzie $C_n \in \mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y$. Wtedy $C_x = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} C_{n,x}$, gdzie $C_{n,x}$ jest $x$-przekrojem zbioru $C_n$, $x \in X$.
Z $\sigma$-addytywności $\mu_Y$ i całkowalności szeregów wyraz po wyrazie

$$\begin{aligned}\mu_X \otimes \mu_Y(C) &= \int_X f_C(x)\, d\mu_X = \int_X \mu_Y(C_x)\, d\mu_X = \int_X \mu_Y\Big(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} C_{n,x}\Big)\, d\mu_X \\ &= \int_X \sum_{n=1}^{\infty} \mu_Y(C_{n,x})\, d\mu_X = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X \mu_Y(C_{n,x})\, d\mu_X \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_{C_n}(x)\, d\mu_X = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_X \otimes \mu_Y(C_n). \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

**Def.** Miarę $\mu_X \otimes \mu_Y$ na $\mathcal{F}_X \otimes \mathcal{F}_Y$ spełniającą (†) nazywamy **miarą produktową**, lub też **iloczynem miar** $\mu_X$ i $\mu_Y$.

**Uw.** Produktowanie miar jest łączne, tzn.

$$(\mu_X \otimes \mu_Y) \otimes \mu_Z = \mu_X \otimes (\mu_Y \otimes \mu_Z)$$

dla dowolnych $\sigma$-skończonych miar $\mu_X$, $\mu_Y$, $\mu_Z$. Zatem możemy i będziemy omijać nawiasy w tym kontekście.

**Prz.** Potęgi jednowymiarowej miary Lebesgue'a $\lambda$ na $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (długości na prostej $\mathbb{R}$) są $n$-wymiarowymi Lebesgue'a $\lambda^n$ na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$:

$$\lambda^{\otimes n} := \underbrace{\lambda \otimes \lambda \otimes \cdots \otimes \lambda}_{n\text{-razy}} = \lambda^n$$

**Prz.** Zmienne losowe $\xi$, $\zeta$ na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ są **niezależne** $\iff$ rozkład wektora losowego $(\xi, \zeta)$ jest produktem rozkładów $\xi$ i $\zeta$, czyli

$$\mu_{(\xi,\zeta)} = \mu_\xi \otimes \mu_\zeta$$

gdzie $\mu_{(\xi,\zeta)}(C) := P\big((\xi,\zeta) \in C\big)$ dla $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

**Lem.** Niech $C \in \mathcal{F}_X \otimes \mathcal{F}_Y$. Wtedy

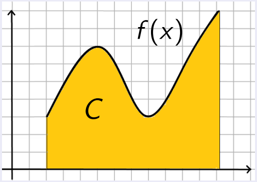
1. dla $\mu_X$-prawie każdego $x \in X$ przekrój $C_x := \{y \in Y : (x, y) \in C\}$ należy do $\mathcal{F}_Y$. W szczególności, $\mu_X$-prawie wszędzie określona jest funkcja $f_C(x) = \mu_Y(C_x)$ i jest ona mierzalna.
2. Zachodzi równość: $\mu_X \otimes \mu_Y(C) = \int_X f_C(x)\, d\mu_X$

**Dowód:** Gdy $C = A \times B$ to już widzieliśmy w dowodzie **Tw**. Ogólnie

**Wn.** Jeżeli $f \geqslant 0$ funkcja mierzalna na $X$,

$C := \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} : 0 \leqslant t \leqslant f(x)\}$, to

$$\mu_X \otimes \lambda(C) = \int_X f(x)\, d\mu_X$$




**Dowód:** Stosujemy **Lem** dla $\mu_Y = \lambda$. Wtedy $C_x = [0, f(x)]$. Zatem $f_C(x) = \lambda(C_x) = f(x) - 0 = f(x)$. Czyli teza wynika z **Lem** (2). ■

**Pytanie:**

Kiedy całkę podwójną można liczyć jako całkę iterowaną?

## Twierdzenie Tonellego.


Dla dowolnej $\mathcal{F}_X \otimes \mathcal{F}_Y$-mierzalnej funkcji $f(x,y) \geqslant 0$

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\, d\mu_X \otimes \mu_Y = \int_X \int_Y f(x,y)\, d\mu_Y d\mu_X = \int_Y \int_X f(x,y)\, d\mu_X d\mu_Y$$

W szczególności, $\int_Y f(x,y)\, d\mu_Y$ jako funkcja od $x$ jest $\mathcal{F}_X$-mierzalna oraz $\int_X f(x,y)\, d\mu_X$ jako funkcja od $y$ jest $\mathcal{F}_Y$-mierzalna.

**Dowód:** Niech $C := \{(x,y,t) \in X \times \mathbb{R} : 0 \leqslant t \leqslant f(x,y)\}$. Z **Wn**

$$\mu_X \otimes \mu_Y \otimes \lambda(C) = \int_{X\times Y} f(x,y)\, d\mu_X \otimes \mu_Y$$

Na mocy **Lem** dla $\mu_X$-prawie każdego $x \in X$ przekrój

$$C_x = \{(y,t) : (y,t) \in C\} = \{(y,t) \in Y \times \mathbb{R} : 0 \leqslant t \leqslant f(x,y)\}$$

należy do $\mathcal{F}_Y$, funkcja $f_C(x) = \mu_Y \otimes \lambda(C_x) \overset{\textbf{Wn}}{=} \int_Y f(x,y)\, d\mu_Y$ jest $\mathcal{F}_X$-mierzalna oraz

$$\mu_X \otimes \mu_Y \otimes \lambda(C) = \int_X f_C\, d\mu_X = \int_X \int_Y f(x,y)\, d\mu_Y\, d\mu_X.$$

Dowodzi to pierwszej równości w tezie. Drugiej dowodzi się podobnie. ■

## Twierdzenie Fubiniego.


Dla dowolnej $\mu_X \otimes \mu_Y$-całkowalnej funkcji $f(x, y)$

$$\int_{X \times Y} f(x,y)\, d\mu_X \otimes \mu_Y = \int_X \int_Y f(x,y)\, d\mu_Y d\mu_X = \int_Y \int_X f(x,y)\, d\mu_X d\mu_Y$$

W szczególności, $\int_Y f(x,y)\, d\mu_Y$ jako funkcja od $x$ jest $\mu_X$-całkowalna oraz $\int_X f(x,y)\, d\mu_X$ jako funkcja od $y$ jest $\mu_Y$-całkowalna.

**Dowód:** Wniosek z Twierdzenia Tonellego poprzez zastosowanie go do części dodatniej $f^+(x,y)$ oraz części ujemnej $f^-(x,y)$ funkcji $f(x,y)$.

**Uw.** Na ogół, z istnienia całek iterowanych nie wynika ich równość, a z ich równości i skończoności nie wynika całkowalność funkcji.

**Prz1.** Niech $X = Y = [-1, 1]$, $\mu_X = \mu_Y = \lambda$ oraz $f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$ dla $(x,y) \neq (0,0)$. Skoro $f(x,y)$ nieparzysta ze względu na $x$ i $y$, to $\int_{-1}^{1} f(x,y)\, dx = \int_{-1}^{1} f(x,y)\, dy = 0$. Zatem

$$\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} f(x,y)\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} f(x,y)\, dy\, dx = 0.$$

Z drugiej strony $f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$ nie jest całkowalna na $X \times Y$:

$$\int_{[-1,1]^2} |f(x,y)|\, d\lambda^2 \geqslant \iint_{\{(x,y):x^2+y^2 \leqslant 1\}} \frac{|xy|}{(x^2+y^2)^2}\, d\lambda^2$$

$$\left\{ \begin{matrix} \text{współrzędne biegunowe} \\ x = r\sin\varphi, \quad y = r\cos\varphi \end{matrix} \right\} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{r^2 |\cos\varphi \sin\varphi|}{(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)^2}\, r\, d\varphi\, dr$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} |\cos\varphi \sin\varphi|\, d\varphi\, dr$$

$$= \int_0^{2\pi} |\cos\varphi \sin\varphi|\, d\varphi \cdot \int_0^1 \frac{1}{r} dr = \infty.$$

**Prz2.** Niech $X = Y = [0,1]$ oraz $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$. Wtedy

$$\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dy = \int_0^1 \partial_y \left( \frac{y}{x^2+y^2} \right) dy = \left[ \frac{y}{x^2+y^2} \right]_0^1 = \frac{1}{x^2+1}$$

a stąd

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dy\, dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\, dx = [\operatorname{arctg}(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Z drugiej strony, skoro $f(x,y) = -f(y,x)$, to mamy

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dx\, dy = -\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dy\, dx = -\frac{\pi}{4}.$$